Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas
16 de febrero de 1999

1. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la función dada por
$$f(z)=\frac{1}{i}\log(z+i\sqrt{1-z^2})\quad (z\in\mathbb{C})$$
Justifíquese que:
a) $\cos(f(z))=z$ para todo $z\in\mathbb{C}$
b) f es holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{x:x\in\mathbb{R},\ |x|\geq 1\}$.
c) Calcúlese el desarrollo de Taylor de la derivada de f en $z=0$, y dedúzcase el desarrollo de Taylor de f en $z=0$.

2. Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)|\leq|g(z)|$ para todo $z\in\mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

3. Dado $a\in\mathbb{C}$, $|a|\neq 1$, calcúlese la integral:
$$\int_{C(0,1)}\frac{\operatorname{sen} z}{(a^2+1)z-a(z^2+1)}\,dz$$

4. Sea $f:D(0,1)\to\mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Se define
$$M(r)=\text{máx}\{|f(z)|:|z|=r\}\quad (0<r<1).$$
a) Pruébese que la función M es estrictamente creciente.
b) Supóngase que hay un número natural, n, tal que para todo $r\in]0,1[$ es $M(r)=r^n$, y dedúzcase que $f(z)=\alpha z^n$ para todo $z\in D(0,1)$, donde $\alpha\in\mathbb{C}$ con $|\alpha|=1$.

5. Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0)=0$. Pruébese que la serie $\sum_{n\geq 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa.